



تاس

می ریزیم و جمع می کنیم!

● محدثه رجایی

کلیدواژه‌ها: احتمال، شبیه سازی،
خم زنگ دیس، قضیه حد مرکزی

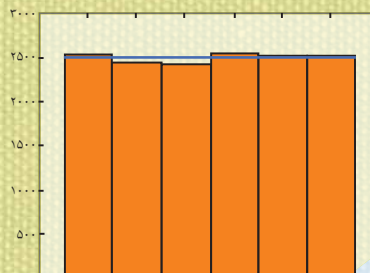
ارتفاع ستونی که زیر آن عدد ۱ نوشته شده است، نشان می دهد که در این ۱۵ هزار پرتاب، چند بار ۱ آمده است. ستون های دیگر هم به همین شکل تعداد دفعاتی را که بقیه اعداد دیده شده اند، نشان می دهند. فکر می کنید که خط افقی آبی چه چیزی می گوید؟ بله، درست است. تعداد دفعاتی را نشان می دهد که انتظار داریم هر کدام از اعداد حدوداً به آن اندازه در پرتاب ها دیده شوند. با توجه به آنچه که قبلاً گفتیم، انتظار داریم هر کدام از اعداد تقریباً $\frac{15000}{6}$ دفعه در نتیجه پرتاب ها ظاهر شود. خط آبی همین مقدار ۲۵۰۰ را نشان می دهد و می بینیم که ارتفاع هیچ یک از ستون ها فاصله زیادی با خط آبی ندارد.

تعداد تاس ها: دو!

اگر دو تا تاس را که یکی قرمز و دیگری سیاه است، با هم پرتاب کنیم و عددهایی که می آیند را با هم جمع بزنیم، عددی که به دست می آوریم چه خواهد بود؟ چون نتیجه پرتاب هر تاس شانسی است، اینکه جمع نتایج چه عددی باشد هم به شانس ربط دارد و از قبل نمی توانیم دقیقاً بگوییم چه چیزی است. اما برایمان مشخص است که کمترین مقدار آن وقتی به دست می آید که هر دو تاس یک بیایند و بیشترین مقدار هم وقتی که هر دو شش بیایند. پس نتیجه عددی بین ۲ تا ۱۲ است و همه عددهای طبیعی بین این دو عدد هم می توانند نتیجه جمع باشند. می توانید بگویید چرا؟ فکر می کنید مثل وقتی که یک تاس داشتیم، همه این اعداد

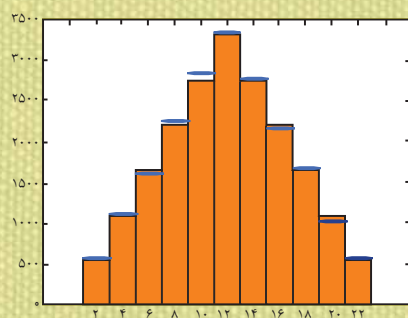
تعداد تاس ها: یک!

پیش از آنکه تاس بریزیم، نمی دانیم که تاس موقع فرود آمدن روی کدام یک از وجه هایش خواهد نشست و بنابراین نمی دانیم که نتیجه پرتاب تاس چه عددی خواهد بود. اما می دانیم که نتیجه حتماً یکی از اعداد ۱ تا ۶ است (حالت هایی که تاس درست روی زمین قرار نگیرد و معلوم نباشد که نتیجه کدام عدد است را در نظر نمی گیریم. یعنی فرض می کنیم که تاس همیشه روی یکی از شش وجه خود قرار می گیرد). علاوه بر این، اگر تاس سالم باشد، انتظار داریم که هیچ وجهی نباشد که شانس روی زمین قرار گرفتنش بیشتر از یک وجه دیگر باشد و انتظار داریم که اگر تاس سالمی را بارهای بار پرتاب کنیم، همه اعداد ۱ تا ۶ تقریباً به یک اندازه دیده شوند. می بینیم که گرچه نتیجه پرتاب تاس عددی شانسی است، هنوز هم می توانیم درباره آن چیزهایی بگوییم! بگذارید با هم نتیجه پرتاب ۱۵ هزار بار تاس سالم را ببینیم. البته برای انجام این مشاهده تاس پرتاب نمی کنیم، بلکه از یک نرم افزار ریاضی که پرتاب تاس را برای ما شبیه سازی می کند کمک می گیریم.





پرتاب‌ها عدد پنج را ببینیم. برای سایر اعداد هم می‌توان این کسر را از روی جدول محاسبه کرد. حالا ببینیم نتیجه ۲۰ هزار بار پرتاب دو تا تاس و محاسبه مجموع آن‌ها چگونه است.



این بار هم خطوط آبی نشان می‌دهند که انتظار داریم هر کدام از اعداد تقریباً چند بار دیده شوند و همان‌طور که از نمودار پیداست، تعداد دفعاتی که هر کدام از اعداد را دیده‌ایم، به مقداری که انتظار داشتیم نزدیک است.

حالت کلی و چند مثال!

حالا می‌خواهیم حالت کلی را بررسی کنیم. بیایید فرض کنیم k تا تاس داریم و $k > 1$. آن‌ها را با هم پرتاب می‌کنیم و همه عددهایی را که می‌آیند با هم جمع می‌زنیم. باز هم نتیجه شانس است؛ چون نتیجه تک‌تک تاس‌ها شانس است. کمترین مقدار جمع وقتی به‌دست می‌آید که همه تاس‌ها یک بیایند؛ یعنی کمترین نتیجه ممکن k است. بیشترین مقدار هم برابر است با $6k$ (چرا؟) و همه اعداد طبیعی بین این دو عدد هم جزو حالت‌های ممکن هستند. (چرا؟) با اینکه نتیجه شانس است، اما همه حالت‌ها مثل هم نیستند. مثلاً عدد k فقط در یک حالت، آن هم زمانی که همه تاس‌ها یک بیایند به‌دست می‌آیند، ولی عدد $k+1$ در k حالت دیده می‌شود. چون هر وقت که همه تاس‌ها به جز یکی ۱ بیایند و آن یک تاس ۲ بیاید، جمع عددها $k+1$ می‌شود. می‌خواهیم برای چند مقدار متفاوت k پرتاب k تاس و محاسبه مجموع نتایج را آزمایش کنیم. نمودارهای زیر نتیجه این آزمایش‌ها را نشان می‌دهند.

هم‌شانس هستند؟ یعنی اگر بارهای بار دو تا تاس را پرتاب کنیم و نتایج را با هم جمع بزنیم، عددهای ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را تقریباً به یک اندازه مشاهده می‌کنیم؟ فرض کنید بازی پرتاب دو تاس به این شکل است که دو بار تاس می‌ریزید و اگر جمع عددها ۲ شد، برنده و اگر جمع آن‌ها ۳ شد، بازنده می‌شوید. این بازی را عادلانه می‌دانید؟ بیایید ببینیم که چه‌طور می‌توانیم به این سؤال‌ها جواب بدهیم!

در مورد پرتاب یک تاس، شش حالت ممکن وجود داشت که گفتیم به‌خاطر تقارنی که شکل تاس دارد، همه آن‌ها را هم‌شانس می‌دانیم. در مورد مجموع نتیجه پرتاب دو تاس بازده حالت ممکن وجود دارد. اما هر کدام از این حالت‌ها را می‌توان به حالت‌های کوچک‌تری تقسیم کرد. مثلاً نتیجه وقتی ۲ می‌شود که هم تاس قرمز و هم تاس سیاه ۱ بیایند. نتیجه در چه حالت‌هایی ۳ می‌شود؟ وقتی تاس قرمز ۱ و تاس سیاه ۲ بیایند، جمع ۳ است. اما این تنها حالت ممکن نیست.

اگر تاس سیاه ۱ و تاس قرمز ۲ بیاید هم جمع ۳ می‌شود. پس در بازی پرتاب دو تاس شانس ۲ و شانس ۳ با هم برابر نیست. در جدول زیر حالت‌های ممکن برای به‌دست آوردن هر یک از اعداد ۲ تا ۱۲ را می‌بینید. اعداد سیاه نتیجه پرتاب تاس سیاه و اعداد قرمز نتیجه پرتاب تاس قرمز هستند.

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
حالت‌های ممکن	۱،۱	۱،۲ ۲،۱	۱،۳ ۲،۲ ۳،۱	۱،۴ ۲،۳ ۳،۲ ۴،۱	۱،۵ ۲،۴ ۳،۳ ۴،۲ ۵،۱	۱،۶ ۲،۵ ۳،۴ ۴،۳ ۵،۲ ۶،۱	۲،۶ ۳،۵ ۴،۴ ۵،۳ ۶،۲	۳،۶ ۴،۵ ۵،۴ ۶،۳	۴،۶ ۵،۵ ۶،۴	۵،۶ ۶،۵	۶،۶
تعداد حالت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

این جدول همه حالات ممکن نتیجه پرتاب دو تاس را نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌بینیم، تعداد همه حالت‌ها ۳۶ است. از این ۳۶ حالت، در چهار حالت جمع اعداد دو تاس برابر ۵ است. بنابراین، انتظار داریم که اگر بارهای بار دو تاس را پرتاب کنیم و جمع عددهایشان را به‌دست آوریم، حدوداً در $\frac{4}{36}$

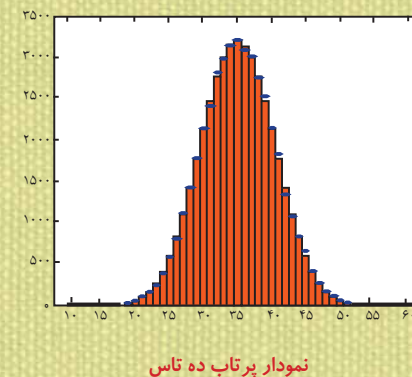
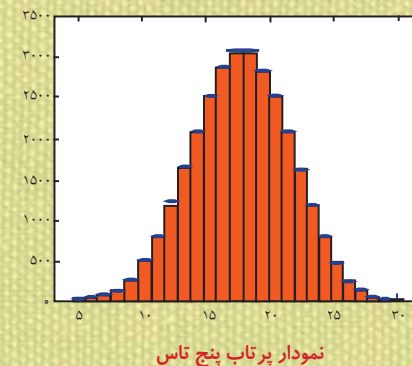
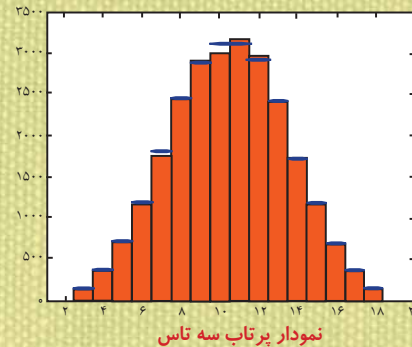


یک مشاهده!

یک بار دیگر به نمودارهایی که با خطوط آبی تیره رسم شده‌اند نگاه کنید! وقتی تعداد تاس‌ها زیاد می‌شود، این نمودارها کم‌کم شبیه منحنی زیر می‌شوند. نام این منحنی، خم زنگ‌دیس است. علت این نام‌گذاری هم شکل ظاهری منحنی است که شبیه یک زنگ است!



از ویژگی‌های این خم می‌توان به متقارن بودن آن اشاره کرد و اینکه مقدار آن وقتی از نقطه وسط دور می‌شویم، به سرعت کوچک می‌شود! در مورد پرتاب تاس‌ها این یعنی وقتی تعداد تاس‌ها زیاد باشد، مجموع‌های نزدیک مقدار میانی خیلی بیشتر دیده می‌شوند تا مجموع‌هایی که از مقدار وسط فاصله دارند. ما در اینجا مشاهده‌مان را خیلی نادقیق بیان کرده‌ایم و توجه‌مان تنها به شباهت ظاهری نمودارها بوده است! اما می‌توان این مشاهده را به زبان ریاضی بیان کرد. در واقع، مشاهده ما حالت خاصی از یکی از مهم‌ترین قضیه‌های شاخه احتمال است که در درس‌های دانشگاهی مطرح می‌شود و «قضیه حد مرکزی» نام دارد.



در هر کدام از این شکل‌ها، خط افقی آبی‌رنگ بالا یا پایین یک عدد نشان می‌دهد که انتظار داشته‌ایم آن عدد تقریباً چند بار به عنوان مجموع نتایج پرتاب تاس‌هایمان دیده شود.

